20-10-21

3η Διάλεξη

Ορισμός: $\{a_n\}$ Cauchy αν $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω $\forall m, n \geq n_0$ $|a_m - a_n| < \varepsilon$.

Θεώρημα: $\{a_n\}$ συγκλίνει αν-ν $\{a_n\}$ Cauchy.

Απόδειξη

"$\Rightarrow$" (Ισχύει για μετρικούς χώρους): $\exists \ell \in \mathbb{R}$ τ.ω $a_n \to \ell$. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω $\forall n \geq n_0$ $|a_n - \ell| < \varepsilon/2$

$\Rightarrow \forall m, n \geq n_0$, $|a_n - a_m| \leq |a_n - \ell| + |a_m - \ell| < \varepsilon$

$\Rightarrow \{a_n\}$ Cauchy.

"$\Leftarrow$" Έστω $\varepsilon > 0$. $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω $|a_n - a_m| < \varepsilon$ $\forall m, n$

$\xRightarrow{m = n_0} a_{n_0} - \varepsilon < a_n < a_{n_0} + \varepsilon$ $\forall n \geq n_0 \Rightarrow \{a_n\}$ φραγ

$\xRightarrow{B-W} \exists$ υπακολουθία $\{a_{k_n}\}$ τ.ω $a_{k_n} \to \ell \in \mathbb{R}$

- $\{k_n\}$ γν. αύξουσα $\Rightarrow k_n \geq n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ (εύκολα, επαγωγικά)
- $\exists n_0' \in \mathbb{N}$, τ.ω $|a_{k_n} - \ell| < \varepsilon$ $\forall n \geq n_0'$. Θέτω $N = \max\{n_0, n_0'\}$
- $\forall n, m > N$: $|a_{k_n} - a_m| < \varepsilon/2$
- $|a_m - \ell| \leq |a_m - a_{k_n}| + |a_{k_n} - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ $\forall n \geq N$

$\Rightarrow a_n \to \ell$

Οριακά Σημεία Ακολουθίας

Ορισμός: Έστω $\{a_n\}$ πραγματική ακολουθία. Ο αριθμός $\ell \in \mathbb{R}$ ονομάζεται $\boxed{\text{οριακό σημείο}}$ της $\{a_n\}$, αν $\exists$ $\{a_{k_n}\}$ υπακ. της $\{a_n\}$ τ.ω. $a_{k_n} \to \ell$

Π.χ. $a_n = \begin{cases} n, & n \text{ άρτιο} \\ 1/n, & n \text{ περιττός} \end{cases}$

1 οριακό το 0. $\left(\begin{array}{l} \text{αν } n \text{ άρτιος} \Rightarrow a_n \to \infty \\ \text{αν } n \text{ περ.} \Rightarrow a_n \to 0 \end{array}\right)$

Θεώρημα: Έστω S το σύνολο των οριακών αριθμών της $\{a_n\}$. Τότε, το S είναι κλειστό (δηλ. αν $\{x_n\}$ ακολ. από το S, $x_n \to t \in \mathbb{R} \Rightarrow t \in S$).

Απόδειξη

Έστω $\{x_n\} \subseteq S$ (ακ. από το S) τ.ω. $x_n \to t$. Αρκεί ν.δ.ο. $\exists$ υπακολ. $\{a_{k_n}\}$ της $\{a_n\}$ τ.ω. $a_{k_n} \to t$.

- $\exists$ $k_1 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $|a_{k_1} - \underbrace{x_1}_{\text{οριακός αριθμός}}| < 1$ αλλιώς $|a_n - x_1| \geq 1$ $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \nexists$ υπακ. της $\{a_n\}$ που να συγκλίνει στο x_1 $\Rightarrow x_1 \notin S$ άτοπο

- $\exists$ $k_2 \in \mathbb{N}$ $k_2 > k_1$ τ.ω. $|a_{k_2} - x_2| < 1/2$ αλλιώς $x_2 \notin S$ άτοπο
- $\exists$ $k_3 \in \mathbb{N}$ $k_3 > k_2$ τ.ω. $|a_{k_3} - x_3| < 1/3$ — " — $x_3 \notin S$ άτοπο

a_{k_n} υπακολουθία της $\{a_n\}$ και $|a_{k_n} - x_n| < 1/n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Άρα, αφού η $\{x_n\} \to t$ και η $\{a_{k_n}\} \to t$.

(*) Αν $\{a_n\}$ άνω φρ. και $S=\emptyset$ τότε $\lim a_n = -\infty = \limsup a_n = \liminf a_n$

Αν $\{a_n\}$ κάτω -//- -//- $\lim a_n = +\infty = \liminf a_n = \limsup a_n$

Πρόταση: Αν $\{a_n\}$ φραγμένη $\Longleftrightarrow$ το σύνολο S των οριακών αριθμών της $\{a_n\}$ είναι φραγμένο $\xRightarrow{\text{Sκλειστό}}$ $\exists \min S, \max S$

Ορισμοί: • Αν $\{a_n\}$ άνω φρ. ορίζω $\limsup a_n = \sup S = \max S$

• -//- κάτω -//- $\liminf a_n = \inf S = \min S$

• Αν $\{a_n\}$ όχι άνω φρ. ορίζω $\limsup a_n = +\infty$

• -//- κάτω -//- $\liminf a_n = -\infty$

• Αν $\{a_n\}$ όχι κάτω φρ. αλλά άνω φραγ και $S=\emptyset$ τότε $\lim a_n = -\infty = \limsup a_n = \liminf a_n$

• -//- -//- άνω -//- -//- κάτω -//- $\lim a_n = \infty = \liminf a_n = \limsup a_n$

• Αν $\{a_n\}$ συγκλίνει στο ℓ ή $a_n \to \infty$ ή $a_n \to -\infty$ $\Rightarrow \limsup a_n = \liminf a_n$ ($=\ell$ αν $a_n \to \ell$)

$\to \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$

• Αν $\lim a_n \nexists$ στο $\bar{\mathbb{R}}$ τότε $\limsup a_n > \liminf a_n$

ΑΡΑ το $\lim a_n \exists$ στο $\bar{\mathbb{R}}$ αν-ν $\limsup a_n = \liminf a_n$ και $\{a_n\}$ συγκλίνει αν-ν $\limsup a_n = \liminf a_n \in \mathbb{R}$

Θεώρημα: Έστω $\{a_n\}$ πραγ. ακολ. τότε, (1)

$$\limsup a_n = \lim_{n\to\infty} \sup\{a_k : k \geq n\}$$

και

$$\liminf a_n = \lim_{n\to\infty} \inf\{a_k : k \geq n\}$$

Απόδειξη

Εύκολα δ.ο $\limsup(-a_n) = -\liminf a_n$.
Άρα, αρκεί ν.δ.ο η (1)
Θεωρώ $b_n = \sup\{a_k : k \geq n\}$
$b_n = \sup\{a_n, a_{n+1}, \dots\} \geq \sup\{a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\} = b_{n+1}$

$\{b_n\}$ φθιν. $\Rightarrow$ $\lim b_n$ $\exists$ και είτε ανήκει στο $\mathbb{R}$ είτε είναι $-\infty$.

• Έστω $\lim b_n \in \mathbb{R}$. Έστω $\{a_{k_n}\}$ υπακ. της $\{a_n\}$ τ.ω. $a_{k_n} \to l \in \mathbb{R}$

$b_{k_n} = \sup\{a_{k_n}, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots\} \geq \underset{\downarrow l}{a_{k_n}} \Rightarrow \lim b_n \geq l$
$\downarrow$
$\lim b_n$

$\Rightarrow \lim b_n \geq \limsup a_n$ (αν $\{a_n\}$ είναι άνω φρ.)

Αν $\{a_n\}$ όχι άνω φρ. τότε $\exists$ $\{a_{k_n}\}$ υπακ. της $\{a_n\}$ τ.ω $a_{k_n} \to \infty \Rightarrow b_{k_n} \to +\infty \xRightarrow{\lim b_k \exists} b_n \to \infty$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \limsup$

Γενικά δ.ο $\lim b_n \geq \limsup a_n$.

• Έστω $\limsup a_n \in \mathbb{R} \Rightarrow \limsup a_n = \max S$ ($\{a_n\}$ άνω φρ.)
Έστω ότι $\lim b_n > \limsup a_n = t \in \mathbb{R}$

• $\exists$ $\{a_{k_n}\}$ υπακ. της $\{a_n\}$ τ.ω $\lim a_{k_n} = t$.

Έστω $\limsup a_n < m < \lim b_n$. Έστω ότι $\exists$ άπειροι όροι της $\{a_n\}$ μεγαλύτεροι του $m \Rightarrow \exists$ $\{a_{l_n}\}$ υπακ. τ.ω $a_{l_n} > m$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\xRightarrow[\text{άνω φρ.}]{\{a_n\}}$ $\{a_{l_n}\}$ φρ. $\Rightarrow$

B-W

$\Longrightarrow \exists$ υπακολ. $\{a_{l_{k_n}}\}$ της $\{a_{l_n}\}$ που να συγκλίνει σε κάποιο a

$\{a_{l_n}\}$ υπ. της $\{a_n\}$ $\Longrightarrow a \in S$ και $a \geq m > \limsup a_n$. Άτοπο.

Άρα. $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω $\forall n \geq n_0$ $a_n \leq m \Rightarrow$

$\Rightarrow b_n \leq m$ $\forall n \geq n_0 \Rightarrow \lim b_n \leq m$ άτοπο

Τέλος. • αν $\limsup a_n = +\infty \Rightarrow \lim b_n = +\infty = \limsup a_n$

• αν $\limsup a_n = -\infty \Rightarrow a_n \to -\infty \Rightarrow$

Αν $M>0$ $\exists n_0$ τ.ω $\forall n \geq n_0$

$a_n < -M \Rightarrow \underbrace{\sup\{a_n, a_{n+1}, \dots\}}_{= b_n} \leq -M$ $\forall n \geq n_0$

$\Rightarrow \lim b_n \leq -M$, $\forall M > 0$

$\Rightarrow \lim b_n = -\infty = \limsup a_n$

Μετρικοί Χώροι

* Μετρική μπορείς να ορίσεις παντού, νόρμα μόνο σε διαν. χώρ.

Ορισμός: Έστω $X \neq \emptyset$, $d: X \times X \to \mathbb{R}$. Η d ονομάζεται μετρική στο X αν:

(i) $d(x,y) \geq 0$ $\forall x,y \in X$ με ισότητα αν-ν $x=y$

(ii) $d(x,y) = d(y,x)$ $\forall x,y \in X$

(iii) $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$ $\forall x,y,z \in X$

Το ζεύγος (X,d) ονομάζεται μ. χ.

Πχ ① $X = \mathbb{R}^n$ $d_p(x,y) = \begin{cases} (|x_1-y_1|^p + \dots + |x_n-y_n|^p)^{1/p}, & p \geq 1 \\ \max\{|x_1-y_1|, \dots, |x_n-y_n|\}, & p = \infty \end{cases}$

$p=2$ Ευκλ. Μετρ.

② Διακριτή Μετρική $d(x,y)=\begin{cases}1, & x\neq y\\ 0, & x=y\end{cases}$

<u>Ορισμός:</u> Έστω X γραμμ. χώρος πάνω από το $\mathbb{R}$ ή το $\mathbb{C}$ και $\|\cdot\|: X \to \mathbb{R}$. Η $\|\cdot\|$ ονομάζεται νόρμα πάνω στον X αν

(i) $\|x\| \geq 0$ με ισότητα αν-ν $x=0$ $\forall x \in X$

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ (ή $\mathbb{C}$) $\forall x \in X$

(iii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ $\forall x, y \in X$

<u>Πχ</u> Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα. Η $d: X \times X \to \mathbb{R}$ με $d(x,y)=\|x-y\|$ είναι η μετρική που επάγεται η $\|\cdot\|$

<u>Ορισμός</u> ① Έστω (X,d) μ. χ., $\{x_n\} \subseteq X$. $x_n \to x$ ($\lim x_n = x$) αν $d(x_n, x) \to 0$

② Το A λέγεται φραγμένο αν $\exists M>0$ τ.ω $d(x,y)<M$ $\forall x,y \in A \Leftrightarrow \exists M'>0$ και $\exists x \in A$ τ.ω $\forall y \in A$, $d(x,y)<M'$